双曲守恒律方程的 Lax-Wendroff 时间离散 WENO 格式

李兴华[1]， 孙 阳[1]， 艾晓辉[2]
(1. 哈尔滨理工大学 理学院，黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 东北林业大学 理学院，黑龙江 哈尔滨 150040)

摘 要: 双曲守恒型方程的高精度、高分辨率计算格式的研究一直是计算流体力学的热点问题。针对原 WENO-JS 格式分辨率较低和计算量偏大的不足问题，提出利用简单的重构数值通量的方法以提高计算效率，构造了新的简单限制器的 5 阶迎风型 WENO 格式。通过 MATLAB 软件的仿真对 Lax-Wendroff WENO-JS 格式、Lax-Wendroff 简单限制器 WENO 格式、Runge-Kutta WENO-JS 格式、Runge-Kutta 简单限制器的 WENO 格式的实验结果进行了分析，并比较了这四种计算格式的计算效率和计算精度。数值实验表明: 新格式 Lax-Wendroff 简单限制器 WENO 格式在保持原 WENO 分辨率的前提下，计算速度有明显提高，减少了 20% 的计算时间。

关键词: 高精度; WENO; Runge-Kutta; Lax-Wendroff; 时间离散
DOI: 10.15938/j.jhust.2017.06.026
中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2017)06-0134-06

WENO Scheme Based on Lax-Wendroff Time Discretization to Solving Hyperbolic Conservation Laws

LI Xing-hua[1], *SUN Yang*[1], *AI Xiao-hui*[2]
(1 School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;
2 School of Science, Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract: The research of high accuracy and high resolution schemes have been a hot topic in computational mathematics. According to low resolution and large amount of calculation of the original WENO-JS scheme, we propose a simple new limiter fifth order upwind WENO scheme to reconstruct the numerical flux of the simple structure to improve the computational efficiency. Compared with other efficient high accuracy schemes such as ENO and WENO, it is shown that the computational cost of this scheme is less than that of WENO-JS in the same accuracy. By use of MATLAB software, we compared and analyzed computational efficiencies and computational accuracies of Lax-Wendroff WENO-JS scheme, Lax-Wendroff simple limiter WENO scheme, Runge-Kutta simple limiter WENO scheme and Runge-Kutta WENO-JS scheme. The numerical results show that the new Lax-Wendroff simple limiter WENO scheme can improve the computing speed and reduce the computing time by 20% while maintaining the original WENO resolution.

Keywords: high accuracy; WENO; Runge-Kutta; Lax-Wendroff; time discretization

收稿日期: 2017-10-22
基金项目: 国家自然科学基金(51375128, 11401085); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12541159).
作者简介: 李兴华(1972—)，女，硕士，副教授.
通信作者: 孙 阳(1980—)，男，博士，讲师，E-mail: sunysy@126.com.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

0 引 言

双曲守恒律方程(组)为科学理论和工程应用研究中一类非常重要的偏微分方程(组)。空气动力学、爆炸力学、流体力学等许多力学问题的求解都与其密切相关。由于即使在初始条件充分光滑的条件下,双曲型守恒律方程的解仍可能出现间断。因此,为了能够更加高效地捕捉到间断,并且避免间断附近出现数值振荡,计算流体力学及计算数学等领域一直致力于研究稳定高效的数值计算方法[1-5]。

低阶精度的离散方法可能会对许多流动结构造成"失真"模拟,不能真实反映真实的流动现象。高精度格式具有较小的耗散误差和色散误差,能够更准确地模拟双曲守恒律方程的时空多尺度特性,在同样网格条件下比低阶格式能分辨出更加精细的流场、捕捉到其更细微的结构变化。然而,高阶精度格式也存在不足: 求解在间断处可能出现 Gibbs 现象即产生伪物理振荡,从而导致非线性不稳定现象。因此,发展高分辨率、高精度离散格式是计算流体力学发展中的迫切需要,成为计算流体力学工作者的一大研究方向[6-10]。

TVD 格式的出现,标志着计算流体力学步入了高精度计算格式阶段,大量高精度计算格式不断出现,而 WENO 格式由于其良好的计算稳定性,已经成为一类极为重要的计算格式。众所周知,经典的 WENO-JS 格式存在分辨率较低和计算量偏大两方面问题,因此计算数学工作者尝试对其改进,构造了诸如 WENOZ、WENOM 等很多改进格式。根据文献[11]的基本思想构造的简化限制器的 5 阶 WENO 格式是对原 WENO 格式的很好的补充和修正。

在时间离散方面,本文研究了 Lax-Wendroff 型时间离散格式,其具有较 Runge-Kutta 方法更为优秀的计算效率。本文将 WENO 格式与 Lax-Wendroff 型时间离散相结合,得到了一种时空同步离散的新数值方法——基于 Lax-Wendroff 型时间离散的 WENO 格式。本文研究可以说是对高精度数值方法研究方面的有益补充和探索。

1 WENO5 格式

以迎风型 WENO5 格式为例,说明 WENO 格式的构造方法。在整体模 $S=\{x_{j-2},x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}\}$ 上定义四次多项式 $p_1(x)$,其满足如下条件

$$\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} p_1(x)\,\mathrm{d}x = f_j^+$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} p_1(x)\,\mathrm{d}x = f_j^+,\ j=i-2,i-1,i,i+1,i+2$$

则

$$p_1(x)=f_i^+ + \frac{-82f_{i-1}^+ + 11f_{i-2}^+ + 82f_{i+1}^+ - 11f_{i+2}^+}{120}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) + \frac{40f_{i-1}^+ - 3f_{i-2}^+ - 74f_i^+ + 40f_{i+1}^+ - 3f_{i+2}^+}{56}\left(\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2-\frac{1}{12}\right) + \frac{2f_{i-1}^+ - f_{i-2}^+ - 2f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+}{12}\left(\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3-\frac{3}{20}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) + \frac{-4f_{i-1}^+ + f_{i-2}^+ + 6f_i^+ - 4f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+}{24}\left(\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4-\frac{3}{14}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+\frac{3}{560}\right)$$

在较小模板 $S_2=\{x_{j-2},x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}\}$ 和 $S_3=\{x_{j-2},x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2}\}$ 上构造一次多项式 $p_2(x)$ 和 $p_3(x)$,如下定义:

$$\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} p_2(x)\,\mathrm{d}x = f_j^+,\ j=i-1,i,$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} p_3(x)\,\mathrm{d}x = f_j^+,\ j=i,i+1,$$

可得

$$p_2(x)=f_i^+ + (f_i^+ - f_{i-1}^+)\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

$$p_3(x)=f_i^+ + (f_{i+1}^+ - f_i^+)\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

根据 WENO 限制器的计算公式

$$\beta_n=\sum_{\alpha=1}^{r}\int_{I_i} h^{2\alpha-1}\left(\frac{d^\alpha p_n(x)}{dx^\alpha}\right)^2\mathrm{d}x,\ n=1,2,3$$

则有

$$\beta_1=\left(\frac{-82f_{i-1}^+ + 11f_{i-2}^+ + 82f_{i+1}^+ - 11f_{i+2}^+}{120} + \frac{2f_{i-1}^+ - f_{i-2}^+ - 2f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+}{120}\right)^2 + \frac{13}{3}\left(\frac{40f_{i-1}^+ - 3f_{i-2}^+ - 74f_i^+ + 40f_{i+1}^+ - 3f_{i+2}^+}{56} + \frac{-4f_{i-1}^+ + f_{i-2}^+ + 6f_i^+ - 4f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+}{24}\right)^2 + \frac{781}{20}\left(\frac{2f_{i-1}^+ - f_{i-2}^+ - 2f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+}{120}\right)^2 + \frac{1421461}{2275}\left(\frac{-4f_{i-1}^+ + f_{i-2}^+ + 6f_i^+ - 4f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+}{24}\right)^2$$

$$\beta_2=(f_{i-1}^+ - f_i^+)^2$$

$$\beta_3=(f_i^+ - f_{i+1}^+)^2$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\tau = \left(\frac{|\beta_1 - \beta_2| + |\beta_1 - \beta_3|}{2}\right)^2 = \begin{cases} O(h^6), (f_i^+)' \neq 0, (f_i^+)'' \neq 0, \\ O(h^8), (f_i^+)' \neq 0, (f_i^+)'' \neq 0. \end{cases}$$

$$\omega_n = \frac{\alpha_n}{\sum_{\ell=1}^{3} \alpha_{n\ell}}, \alpha_n = \gamma_n\left(1 + \frac{\tau}{\varepsilon + \beta_n}\right), n = 1,2,3.$$

其中 $\gamma_1 = 0.998, \gamma_2 = 0.001, \gamma_3 = 0.001$

因此可到半点处的正通量

$$\hat{f}_{i+1/2}^+ = \omega_1\left(\frac{1}{\gamma_1}p_1(x_{i+1/2}) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}p_2(x_{i+1/2}) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}p_3(x_{i+1/2})\right) + \omega_2 p_2(x_{i+1/2}) + \omega_3 p_3(x_{i+1/2})$$

针对以上两种 WENO 格构造不同的时间离散格式，能够得到不同的数值方法。针对双曲守恒律方程给出了具体的格式构造过程，主要采用如下介绍的两种时间离散方法 Lax-Wendroff 时间离散和 TVD Runge-Kutta 时间离散。下面，我们将介绍这两种常用的时间离散方法。

2 时间离散格式

目前双曲守恒律方程最为常见的时间离散格式为 TVD Runge-Kutta 时间离散格式，也称为 SSP (strong stability preserving) Runge-Kutta 时间离散。当一阶向前 Euler 迭代下的空间离散格式为 TVD 时，所构造的全离散格式也 TVD 的。本文采用的 Runge-Kutta 时间离散格式为三阶 Runge-Kutta 格式（简记为 RK-3）[12-16] 如下：

本文采用三阶 TVD-Runge Kutta 法对时间项进行离散，具体形式如下：

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \cdot L(U^n)$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \cdot L(U^{(1)})$$

$$U^{(n+1)} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot L(U^{(2)})$$

其中 U^n 是第 n 时间层的守恒变量。这种 Runge-Kutta 方法是保 TVD 性质的，因此适于求解具有激波等强间断问题来抑制数值振荡。

Lax-Wendroff 时间离散又被称为泰勒（Taylor）型时间离散。这种格式基于经典的 Lax-Wendroff 格式。实现的时候，首先将下个时间层的解在时间方向进行泰勒展开，

$$u(x, t^{n+1}) = u(x, t^n) + \Delta t u_t + \frac{\Delta t^2}{2!}u_{tt} + \cdots \quad (1)$$

再利用方程本身，将时间导数转化为空间导数。为了达到时间上的 k 阶精度，我们只需要保留前面的 k 阶导数。

对于非线性双曲守恒律方程而言，本文采用如下冻结参数的方法来实现 Lax-Wendroff 时间离散：

利用空间导数代替时间导数

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f(u)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(a(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a(u)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a(u)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = (-1)^k a(u)^{k-1}\frac{\partial^k f(u)}{\partial x^k}$$

将上述结果代入式（1）可得

$$u(x, t^{n+1}) = u(x, t^n) - \frac{\partial f(u)}{\partial x}\Delta t + a(u)\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2}\frac{\Delta t^2}{2!} - a(u)^2\frac{\partial^3 f(u)}{\partial x^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots$$

3 结果与分析

考虑线性对流方程和非线性方程两种类型的方程的数值求解[17-20]，利用 Lax-Wendroff WENO-JS 格式、Lax-Wendroff 简单限制器 WENO 格式、Runge-Kutta WENO-JS 格式、Runge-Kutta 简单限制器的 WENO 格式四种格式进行数值模拟，研究数值方法的稳定性、收敛性和计算效率等特性，所采用多的通量分裂为 Lax-Fredrichs 通量分裂。

算例 1 线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

具有如下初值 $u(x,0) = \sin(2\pi x)$。计算区域为 [0,1]，计算到 $t = 1.0$ 时刻，边界条件为周期条件。

表 1 和表 2 为 Lax-Wendroff WENO-JS 格式、Lax-Wendroff 简单限制器 WENO 格式、Runge-Kutta WENO-JS 格式、Runge-Kutta 简单限制器的 WENO 格式四种格式的 L_1 误差和精度表，而表 3－3 和表 3－4 为四种格式的 L_∞ 误差和精度表。L_1 误差和 L_∞ 误差的定义如下：

$$\mathrm{err}_{L_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}|u_i^n - u(x_i, t^n)|$$

$$\mathrm{err}_{L_\infty} = \max_i |u_i^n - u(x_i, t^n)|$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

上述表格中计算结果可以看 SWENO5-LW3 的分辨率能够接近 5 阶精度。

表 1　$u(x,0)=\sin(\pi x)$ 的 L_1 误差和精度

Methods	N	L_1 error	L_1 error
WENO5 – RK3	10	0.0415	—
	20	4.34×10^{-3}	3.52
	40	4.87×10^{-4}	4.10
	80	8.41×10^{-6}	4.19
	160	3.87×10^{-7}	4.75
WENO5 – LW3	10	0.0396	—
	20	3.41×10^{-3}	4.01
	40	2.13×10^{-4}	4.39
	80	8.16×10^{-6}	4.58
	160	3.73×10^{-7}	4.81
SWENO5 – RK3	10	0.0401	—
	20	4.07×10^{-3}	3.41
	40	4.23×10^{-4}	4.05
	80	8.60×10^{-6}	4.21
	160	3.55×10^{-7}	4.79
SWENO5 – LW3	10	0.0377	—
	20	3.11×10^{-3}	4.03
	40	2.13×10^{-4}	4.49
	80	7.04×10^{-6}	4.68
	160	$3.33\mathrm{E}\times10^{-7}$	4.95

表 2　$u(x,0)=\sin(\pi x)$ 的 L_∞ 误差和精度

Methods	N	L_∞ error	L_∞ error
WENO5 – RK3	10	0.0815	—
	20	4.37×10^{-2}	3.22
	40	1.87×10^{-3}	3.90
	80	6.41×10^{-5}	4.69
	160	2.07×10^{-6}	5.05
WENO5 – LW3	10	0.0667	—
	20	3.41×10^{-3}	3.71
	40	2.13×10^{-4}	4.69
	80	8.14×10^{-6}	4.98
	160	3.73×10^{-7}	5.09
SWENO5 – RK3	10	0.0715	—
	20	4.34×10^{-2}	3.52
	40	1.77×10^{-3}	4.10
	80	6.31×10^{-5}	4.12
	160	1.87×10^{-6}	5.07

续表 2

Methods	N	L_∞ error	L_∞ error
SWENO5 – LW3	10	0.0396	—
	20	3.23×10^{-3}	4.02
	40	2.01×10^{-4}	4.39
	80	6.86×10^{-6}	4.99
	160	3.73×10^{-7}	5.11

算例 2 线性对流方程. $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$. 具有如下初值 $u(x,0)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0.5\\ 1 & x>0.5\end{cases}$，计算区域为 $[0,1]$，计算到 $t=0.2$ 时刻，$N=200$ 个计算点。图 1 为四种格式的计算结果，表 3 为其计算时间。

表 3　算例 1 格式计算时间的对比

Method	Time/s
WENO5 – RK3	0.070
SWENO5 – RK3	0.066
WENO5 – LW3	0.058
SWENO5 – LW3	0.051

上述图表中，SWENO5-LW3 的精度为最高，而计算时间上也具有一定的优势，计算速度提高了接近 20%，而计算精度非常接近 5 阶。

算例 3 非线性对流方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0$. 具有如下初值 $u(x,0)=0.5+\sin(\pi x)$，计算区域为 $[0,1]$，计算到 $t=1/2\pi$ 时刻，边界条件为周期条件。

表 4　$u(x,0)=0.5+\sin(\pi x)$ 的 L_1 误差和精度

Method	N	L_1 error	L_1 error
WENO5 – RK3	10	0.0505	—
	20	6.37×10^{-3}	3.02
	40	5.87×10^{-4}	3.90
	80	9.41×10^{-6}	4.19
	160	4.87×10^{-7}	4.65
WENO5 – LW3	10	0.0496	—
	20	4.41×10^{-3}	3.41
	40	3.13×10^{-4}	3.99
	80	9.16×10^{-6}	4.23
	160	4.55×10^{-7}	4.79
SWENO5 – RK3	10	0.0481	—
	20	5.07×10^{-3}	3.31
	40	5.23×10^{-4}	3.95

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

续表4

Method	N	L_1 error	L_1 error
	80	9.60×10^{-5}	4.21
	160	3.55×10^{-7}	4.71
SWENO5 – LW3	10	0.0397	
	20	4.11×10^{-3}	3.83
	40	3.13×10^{-4}	4.05
	80	8.04×10^{-5}	4.21
	160	3.33×10^{-7}	4.85

表5 $u(x,0)=0.5+\sin(\pi x)$ 的 L_∞ 误差和精度

Method	N	L_∞ error	L_∞ order
WENO5 – RK3	10	0.0855	—
	20	4.87×10^{-2}	3.12
	40	1.97×10^{-3}	3.90
	80	6.91×10^{-5}	4.69
	160	2.27×10^{-6}	4.99
WENO5 – LW3	10	0.0866	—
	20	3.51×10^{-2}	3.97
	40	2.33×10^{-3}	4.31
	80	6.89×10^{-5}	4.51
	160	2.13×10^{-6}	5.01
SWENO5 – RK3	10	0.0815	—
	20	4.37×10^{-2}	3.22
	40	1.87×10^{-3}	3.90
	80	6.41×10^{-5}	4.69
	160	1.87×10^{-6}	5.01
SWENO5 – LW3	10	0.0516	—
	20	3.51×10^{-2}	3.73
	40	1.07×10^{-3}	4.22
	80	4.87×10^{-5}	4.47
	160	0.87×10^{-7}	5.06

表4和表5分别给出Lax-Wendroff WENO-JS格式、Lax-Wendroff简单限制器WENO格式、Runge-Kutta WENO-JS格式、Runge-Kutta简单限制器的WENO格式计算结果。表4为四种格式的 L_1 误差和精度表，而表5为四种格式的 L_1 误差和精度表。

算例4 非线性对流方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0$. 具有如下初值 $u(x,0)=0.5+\sin(\pi x)$，计算到 $t=\frac{3}{2\pi}$ 时刻，边界条件为周期条件，$N=400$ 个计算点。此时在1.2～1.3之间的位置产生了一强激波，图1和图2为其计算结果。

计算结果中简单限制器的WENO格式仅仅用到了2－3个计算点就可以识别激波，因此可以断定简单限制器的WENO格式的分辨率要高于WENO-JS格式，而计算时间上，Lax-Wendroff时间离散具有一定的优势，WENO LW3和SWENO LW3两种格式的计算时间为最少。

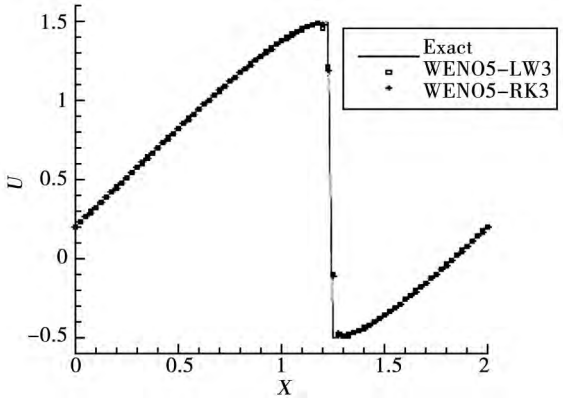

图1 算例4计算结果

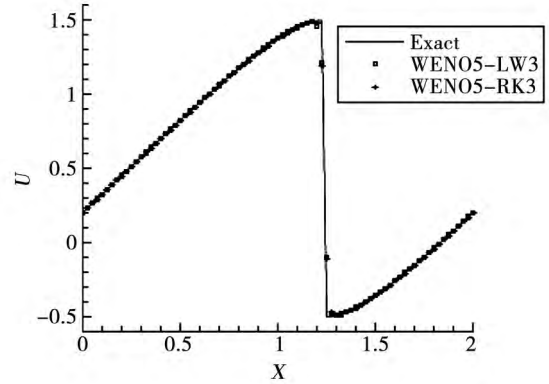

图2 算例4计算结果

4 结 论

针对线性和非线性标量守恒律方程进行了数值求解。研究了不同初值条件下的，Lax-Wendroff WENO-JS格式、Lax-Wendroff简单限制器WENO格式、Runge-Kutta WENO-JS格式、Runge-Kutta简单限制器的WENO格式的计算效率和计算精度。Lax-Wendroff简单限制器WENO格式不但形式简单且便于应用到CFD代码中。算例表明，Lax-Wendroff WENO格式的分辨率与Runge-Kutta型WENO格式较为接近，而Lax-Wendroff简单限制器WENO格式具有更好的激波及小尺度波分辨率，特别计算速度提高了WENO5的20%以上。本文从分析标量双曲

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

守恒律方程解的性质入手,分析了双曲守恒律方程自身的特点和原有的 WENO-JS 差分格式的优缺点后,提出一种简化限制器的 WENO 格式,新格式较原格式的分辨率有所提高。Lax-Wendroff 时间离散格式由于其计算效率方面的优势,可以作为 Runge-Kutta 方法的一种时间离散改进格式。本文研究了四种不同的数值方法: Lax-Wendroff WENO-JS 格式、Lax-Wendroff 简单限制器 WENO 格式、Runge-Kutta WENO-JS 格式、Runge-Kutta 简单限制器的 WENO 格式计算了一维标量守恒型方程,并给出了数值实验的结果。数值试验表明这四种方法均出了高精度高分辨的特性,都具有更好的分辨激波捕捉的能力,在激波间断处不但保持了陡峭的的形状,而且没有出现伪物理振荡。我们发现,对于同样的问题,Lax-Wendroff 简单限制器 WENO 方法能在更短的时间和更小的储存量。当然,从数值实验的结果来看,方法仍有改进的空间。未来需要关注的主要方面在于: 在精度相同的情况下, Lax-Wendroff 型的计算量要小于 Runge-Kutta,因而更具有效率上的优势价值。然而,在推广到双曲守恒律方程组时,需要进行张量运算这给编程带来了一定的困难。下一步作者将试着将推广到高维守恒律方程方程组问题,现公式推到已经完成,正在进行数值实验,以得到较优结果。

参 考 文 献:

[1] 陆金甫. 偏微分方程数值解法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[2] 袁光伟,杭旭登,盛志强,等. 福射扩散计算方法若干研究进展 [M]. 计算物理,2009,26(4): 475 - 500.

[3] 欧阳颀. 非线性科学与斑图动力学导论 [M]. 北京: 北京大学出版社,2010.

[4] 刘儒勋,舒其望. 计算流体力学的若干新方法 [M]. 北京: 科学出版社,2003.

[5] WARMING R F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas-Dynamic Equation with Application of Finite Difference Method [J]. Journal of Computational, 1981,40: 263 - 293.

[6] GODONOV S K. A Difference Schemes for Numerical Computation of Discontinuous Solution of Hydrodynamics Equations [J]. Math. Sbornik, 1959,47: 271 - 306.

[7] ENGQUIST,OSHER S. Stable and Entropy Satisfying Approximation for Transonic Flow Calculation [J]. Mathematics of Computation, 1980,34: 45 - 75.

[8] COCKBURN B,LIN S Y,SHU C W. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws III: One-Dimensional Systems [J]. J. Comput. Phys. ,1989,84: 90 - 113.

[9] COCKBURN B,HOU S, SHU C W. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite element method for conservation laws IV [J]. Math. Comput. ,1990,54: 545 - 581.

[10] LIU H,XU H,GONG H. Modeling the Asymmetry in Traffic Flow (b): Macroscopic Approach [J]. Appl. Math. Model,2013,37 (22): 9441 - 9450.

[11] ZHU J,QIU J X. A New Fifth Order Finite Difference WENO Scheme for Solving Hyperbolic Conservation Laws [J]. J. Comput. Phys. ,2016,318: 110 - 121.

[12] LIU X, ZHANG S,ZHANG H,SHU C W. A New Class of Central Compact Schemes with Spectral-like Resolution II: Hybrid Weighted Nonlinear Schemes [J]. J. Comput. Phys. ,2015,284: 133 - 154.

[13] PIROZZOLI S. Conservative Hybrid Compact-WENO Schemes for Shock-Turbulence Interaction [J]. J. Comput. Phys. ,2002,178 (1): 81 - 117.

[14] QIU J X, DUMBSER M, SHU C W. The Discontinuous Galerkin Method with Lax-Wendroff type Time Discretizations [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2005, 194: 4528 - 4543.

[15] LAX P D. Hyperbolic System of Conservation Laws II [J]. Comm. Pure and Applied Mathematics. 1957,10: 537 - 566.

[16] ZHANG X,SHU C W. On Maximum-Principle-Satisfying High Order Schemes for Scalar Conservation Laws [J]. J. Comput. Phys. ,2010,229 (9): 3091 - 3120.

[17] ZHANG X,SHU C W. Maximum-Principle-Satisfying and Positivity-Preserving High-Order Schemes for Conservation Laws: Survey and New Developments Proc. R. Soc. A [J]. Math. Phys. Eng. Sci. ,2011,467(2): 2752 - 2776.

[18] LIU Y J,SHU C W,TADMOR E,ZHANG M P. Central Discontinuous Galerkin Methods on Overlapping Cells with A Non-Oscillatory Hierarchical Reconstruction [J]. SIAM J. Numer. Anal. , 2007, 45:2442 - 2467.

[19] 姚慧丽,宋晓秋,李兴华. 一类半线性微分方程的渐进概自守温和解 [J]. 哈尔滨理工大学学报,2012,17(1): 72 - 78.

[20] 姚慧丽,卜宪江,宋晓秋. 一类微分方程的指数增长的温和渐进概自守解 [J]. 哈尔滨理工大学学报,2014,19(5):23 - 26.

(编辑: 王　萍)

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net