第22卷 第6期
2017年12月

哈尔滨理工大学学报
JOURNAL OF HARBIN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 22 No. 6
Dec. 2017

四阶收敛的斯蒂芬森迭代修正格式

魏 佳, 黄佳玥
(哈尔滨理工大学 理学院,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 结合斯蒂芬森迭代和牛顿迭代,用抛物线插值函数的导函数取代 $f(x)$ 的一阶导数,提出一种新的可达到四阶收敛的迭代方法,新的迭代公式每步计算仅需计算三次函数值,且无需计算导函数。

关键词: 牛顿法; 斯蒂芬森方法; 抛物线插值

DOI: 10.15938/j.jhust.2017.06.025

中图分类号: O24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2017)06-0131-03

A Modified Steffensen Iterative Method with Fourth-order Convergence

WEI Jia, HUANG Jia-yue
(School of Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: A new fourth-order convergent iterative method formed by Newton´s method and Steffensen method is presented to solve nonlinear equations in this paper. The new iteration formula uses derivative of quadratic interpolation as substitute for derivative of function, so it is totally free from derivatives. Furthermore, this method requires only three evaluations of the function by each iteration.

Keywords: Newton´s method; Steffensen method; quadratic interpolation

0 引 言

求解非线性方程 $f(x)=0$ 是数学界经久不衰的研究课题,究其原因就是其在科学研究以及生产生活中的广泛应用,而迭代法又是求解非线性方程最为常用的方法之一。迭代法中最为经典的就是牛顿法,除此之外比较有代表性的还有:三阶 Halley 迭代[1],Chebyshev 迭代[2],Super-Halley 迭代[3],还有四阶 King 迭代[4]等等。前人在此领域也做出了大量的探索和努力,主要致力于收敛阶数的提高,计算量的减少等方面[5-14]。本文结合牛顿法和斯蒂芬森法用抛物线插值函数在该点的导函数取代 $f(x)$ 的一阶导,提出一种新的可达到四阶收敛的迭代方法,新的迭代公式每步计算仅需计算三次函数值,且无需计算导函数。

1 新方法与收敛性分析

斯蒂芬森迭代法无需求导且能达到二阶收敛,其迭代公式每步运算需计算两个函数值。

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f^2(x_n)}{f(x_n+f(x_n))-f(x_n)} \tag{1}$$

将斯蒂芬森与牛顿法结合在一起就衍生出一个两步

收稿日期: 2017-07-21
基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11521045);黑龙江省自然科学基金(A200811).
作者简介: 魏 佳(1973—),女,实验师,E-mail:2216838451@qq.com;
黄佳玥(1996—),女,硕士研究生.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的迭代方法，每步运算需要计算三个函数值和一个导数，其收敛阶数为四阶。

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \\ x_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{cases} \tag{2}$$

本文在式(2)的基础上提出一种新的迭代方法。在迭代公式(2)中第一步的斯蒂芬森迭代法用到3个点，分别是$(x_n, f(x_n))$，$(x_n + f(x_n), f(x_n + f(x_n)))$，$(y_n, f(y_n))$，基于以上3个点做二次插值多项式$p(x)$，用$p(x)$在点$(y_n, f(y_n))$的导数$p'(y_n)$代替导数$f'(y_n)$，其迭代公式为:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f^2(x)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \\ x_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{p'(y_n)} \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} p'(y_n) = {} & f(y_n)\frac{2y_n - 2x_n - f(x_n)}{(y_n - x_n)(y_n - x_n - f(x_n))} \\ & - f(x_n)\frac{y_n - x_n - f(x_n)}{x_n - y_n} \\ & + \frac{(y_n - x_n) f(x_n + f(x_n))}{f(x_n)(x_n + f(x_n) - y_n)} \end{aligned}$$

迭代公式(3)中每步运算只需计算三个函数值，无需计算导数，在一定程度上大大减少了运算量，于此同时其收敛阶数为四阶。

定理1 假设x^*是非线性方程$f(x) = 0$的单根，函数$f(x)$在x^*邻域内二阶连续可导且$f'(x^*) \neq 0$，则当x_n充分接近于x^*时，迭代公式(3)至少是四阶收敛的。

证明：已知斯蒂芬森迭代是二阶收敛的，因而可得到$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{y_n - x^*}{(x_n - x^*)^2} = c_1$，$c_1$为常数，即当$x_n$充分接近$x^*$时，$y_n - x^* = c_1(x_n - x^*)^2 + O(x_n - x^*)^3$。由二次插值的性质可知

$$\begin{aligned} p'(y_n) & = f'(y_n) + O(x_n - x^*)^2 = \\ & f'(y_n) + O(y_n - x^*)\text{。} \end{aligned}$$

因此，

$$x_{n+1} - x^* = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n) + O(y_n - x^*)} - x^*$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(y_n - x^*)^2} = \frac{1}{y_n - x^*} - \frac{f(y_n)}{[f'(y_n) + O(y_n - x^*)](y_n - x^*)^2} =$$

$$\frac{[f'(y_n) + O(y_n - x^*)](y_n - x^*) - f(y_n)}{[f'(y_n) + O(y_n - x^*)](y_n - x^*)^2} =$$

$$\frac{f'(y_n)(y_n - x^*) + O(y_n - x^*)(y_n - x^*) - f(y_n)}{[f'(y_n) + O(y_n - x^*)](y_n - x^*)^2} =$$

$$\frac{f'(y_n)(y_n - x^*) - [f(y_n) - f(x^*)]}{(y_n - x^*)^2[f'(y_n) + O(y_n - x^*)]} + \frac{O(y_n - x^*)^2}{[f'(y_n) + O(y_n - x^*)](y_n - x^*)^2}$$

由中值定理可知

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(y_n - x^*)^2} = \frac{f'(y_n)(y_n - x^*) - f'(\eta_n)(y_n - x^*)}{(y_n - x^*)^2[f'(y_n) + O(y_n - x^*)]} + \frac{O(y_n - x^*)^2}{[f'(y_n) + O(y_n - x^*)](y_n - x^*)^2} =$$

$$\frac{f''(\xi_n)(y_n - x^*)^2 + O(y_n - x^*)^3}{(y_n - x^*)^2[f'(y_n) + O(y_n - x^*)]} + \frac{O(y_n - x^*)^2}{[f'(y_n) + O(y_n - x^*)](y_n - x^*)^2}$$

其中η_n介于y_n和x^*之间，ξ_n介于y_n和η_n之间。因而，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x^*}{(y_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} + \frac{c_2}{f'(x^*)}$$

这里c_2为常数。因此，当y_n充分接近x^*时，$x_{n+1} - x^* = c_3(y_n - x^*)^2 + O(y_n - x^*)^3$，这里$c_3 = \dfrac{f''(x^*)}{f'(x^*)} + \dfrac{c_2}{f'(x^*)}$，所以

$$x_{n+1} - x^* = c_3 c_1^2 (x_n - x^*)^4 + O(x_n - x^*)^5$$

定理得证。

2 数值实验

考虑如下非线性方程:

问题1：$\begin{cases} f(x) = x^2 - e^x - 3x + 2 = 0 \\ x_0 = 0.5 \end{cases}$

问题2：$\begin{cases} f(x) = x^3 + 4x^2 - 15 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

问题3：$\begin{cases} f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1 = 0 \\ x_0 = 1.6 \end{cases}$

问题4：$\begin{cases} f(x) = 10xe^{-x^2} - 1 = 0 \\ x_0 = 1.8 \end{cases}$

表1 问题1试验结果

迭代次数	x_n	$\lvert f(x_n) \rvert$
1	0.257 638 821 9	0.000 410
2	0.257 530 285 4	$1.828\,585 \times 10^{-17}$
3	0.257 530 285 4	$7.226\,491 \times 10^{-17}$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表2　问题2试验结果验结果

迭代次数	x_n	$\vert f(x_n)\vert$
1	1.664 279 525 5	0.689 071
2	1.632 000 862 6	0.000 422
3	1.631 980 805 6	$9.174\,557\times10^{-17}$
4	1.631 980 805 6	$2.047\,839\times10^{-67}$

表3　问题3试验结果

迭代次数	x_n	$\vert f(x_n)\vert$
1	1.407 040 734 1	0.006 340 68
2	1.404 491 648 3	$9.576\,205\times10^{-11}$
3	1.404 491 648 2	$4.982\,012\times10^{-42}$

表4　问题4试验结果

迭代次数	x_n	$\vert f(x_n)\vert$
1	1.679 298 095 9	0.000 919 327
2	1.679 630 610 4	$8.487\,666\times10^{-14}$
3	1.679 630 610 4	$6.166\,851\times10^{-54}$

3　结　论

本文提出的求解非线性方程单根的四阶收敛迭代方法,每步迭代过程只需计算三次函数值就能达到四阶的收敛效果,而且不必计算导数。数值试验结果表明该方法具有较好的优越性,它丰富了非线性方程求根的方法,在理论上和应用上都具有较高的价值和意义。

参考文献:

[1] HALLEY E. A New, Exact and Easy Method for Finding the Roots of Equations Generally and withOut Any Previous Reduction [J]. Philos. Trans. R. Soc. Lond., 1694(18): 136-148.

[2] KOU J, LI Y. Modified Chebyshev´s Method Free from Second Derivative for Nonlinear Equations [J]. J. Appl. Math. Comput., 2007, 187(2): 1027-1032.

[3] GUTIERREZ J M, HERNANDEZ M A. An Acceleration of Newton´s Method: Super Halley Method [J]. J. Appl. Math. Comput., 2001, 117(2): 223-239.

[4] KING R F. A Family of Fourth Order Methods for Nonlinear Equations [J]. SI AMJ. Numer. Anal., 1973(10): 876-879.

[5] LIU Z, ZHENG Q, ZHAO P. A Variant of Ste Ensens Method of Fourth-order Convergence and Its Applications [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216(7): 1978-1983.

[6] OSTROWSKI A M. Solutions of Equations and Systems of Equations [M]. New York, Academic Press, 1966.

[7] KUNG H T, TRAUB J F. Optimal Order of One-point and Multipoint Iteration [J]. J. Assoc. Comput. Mach., 1974, 21: 643-651.

[8] BI W, REN H, WU Q. Three-step Iterative Methods with Eighth-order Convergence for Solving Nonlinear Equations [J]. J. Comput. Appl. Math., 2009, 255: 105-112.

[9] CORDERO A, HUESO J L, MARTNEZ E, et al. New Modifications of Po-tra-Ptks Method with Optimal Fourth and Eighth Order of Convergence [J]. J. Comput. Appl. Math., 2010, 234: 2969-2976.

[10] CORDERO A, TORREGROSA J R, Vassileva M P. A Family of Modified Ostrowskis Method with Optimal Eighth Order of Convergence [J]. Appl. Math. Lett., 2011, 24(12): 2082-2086.

[11] LIU L, WANG X. Eighth-order Methods with High Efficiency Index for Solving Nonlinear Equations [J]. Appl. Math. Comput., 2010, 215: 3449-3454.

[12] SHARMA J R, SHARMA R. A Family of Modified Ostrowskis Methods with Accelerated Eighth Order Convergence [J]. Numer. Algoritms, 2010(54): 445-458.

[13] THUKRAL R, PETKOVIC M S. A Family of Three-point Methods of Optimal Order for Solving Nonlinear Equations [J]. J. Comput. Appl. Math., 2010, 233: 2278-2284.

[14] SOLEYMANI F, KARIMI B S, KHAN M, et al. Some Modifications of Kings Family with Optimal Eighth Order of Convergence [J]. Math. Comput. Model., 2012(55): 1373-1380.

(编辑:王　萍)

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net