一种二维正交多小波的构造方法

罗 辉, 邓彩霞, 徐延新
(哈尔滨理工大学 应用科学学院,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要:提出了由二维正交单小波函数构造二维正交多小波函数的构造方法,二维正交多小波函数可由所给的二维正交单小波函数的线性组合而成,这种小波函数不是唯一的,只要给出一个二维正交单小波和一个酉矩阵就可以构造一个二维正交多小波.

关键词:单小波函数; 二维正交的多小波函数; 滤波器
中图分类号: O24 文献标志码: A 文章编号: 1007- 2683(2009)05- 0107- 03

An Approach of Constructing Bivariate Orthogonal Multiwavelet

LUO Hui, DENG Cai-xia, XU Yan-xin
(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: An approach of constructing bivariate orthogonal multiwavelet function is presented by a given bivariate orthogonal uni-wavelet function. The bivariate orthogonal multiwavelet function is a linear combination of the given bivariate orthogonal uni-wavelet function, the multiwavelet is not unique. Bivariate orthogonal uni-waavelet function and any unitary matrix are given, so that we can construct a bivariate orthogonal multiwavelet.

Key words: uni-wavelet function; bivariate orthogonal multiwavelet function; filter banks

0 引 言

多小波是小波理论的新发展. 1993年, Goodman, Lee和 Tang[1]提出了多小波的概念, 1994年, Geronimo, Hardin和 Massopust[2]使用分形插值函数构造出 GHM多小波. 研究表明,多小波拥有一些良好的性质,如紧支撑性、对称性、正交性等. 文[3-4]中构造的小波都是一维的并且不同时具备短支集、高阶消失矩、高正则性、正交性和对称性等良好性质,文[3]中构造的小波也只具备不同尺度上的半正交性. 二维多小波的研究已引起很多人的关注,无论是一维多小波还是高维多小波的研究都忽视了它们与单小波函数的联系,应用二维单小波函数去构造二维多小波的理论具有重要意义. 本文给出了由二维单小波函数生成二维多小波函数的条件及构造方法,得到的小波具备正交性,并且此构造法具有很大的灵活性: ①滤波器组选取的随意性; ②单小波函数选取的任意性.

定义 1[5] 设 $\{V_j\}_{j\in Z}$是 $L^2(R^2)$中一串子空间,如果

1) $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in Z$; $\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j} = L^2(R^2)$;

2) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$, $j\in Z$;

3) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$, $k\in Z^2$;

4) 存在函数 $g\in V_0$,使得 $\{g(x-k), k\in Z^2\}$构成 V_0的 Riesz基,称 $\{V_j\}_{j\in Z}$是 $L^2(R^2)$的一个多分辨分析,其中称 $g(x)$为 $L^2(R^2)$上的尺度函数. 若尺度

收稿日期: 2008-11-20
基金项目: 黑龙江省教育厅高校骨干教师创新项目 (1054G010)
作者简介: 罗 辉 (1981—),男,硕士研究生, E-mail: luohui810626188@163.com;
邓彩霞 (1965—),女,教授,硕士生导师.

函数 $\phi(x,y)$满足

$$\langle\phi(x,y),\phi(x-n,y-m)\rangle=\delta_{0,n}\delta_{0,m}$$

则称 $\phi(x,y)$为正交单尺度函数.

定义 2[6] 如果集$\{\psi_{j,n,m}: j,n,m\in Z\}$是 $L^2(R^2)$的 Riesz基,即它是 l^2稳定的且它的线性张成在 $L^2(R^2)$中是稠密的,则称$\{\psi_{j,n,m}: j,n,m\in Z\}$为 $L^2(R^2)$的一个小波基,其中 $\psi_{j,n,m}=2^j\psi(2^jx-n,2^jy-m)$.

定义 3 如果$\langle\psi_{i,k,\alpha},\psi_{j,l,\beta}\rangle=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{\alpha\beta}$对所有的 $i,j\in Z,k,l\in Z,\alpha,\beta\in Z$成立,则称$\{\psi_{j,n,m}: j,n,m\in Z\}$为正交的,且称

$$\psi(x,y)=\sum_{n,m}q_{n,m}\phi(2x-n,2y-m) \tag{1}$$

为正交单小波,定义子空间序列 $U_j\subset L^2(R^2)$为

$$U_j=\overline{\mathrm{span}\{\psi_{j,n,m}: n,m\in Z\}},\quad j\in Z$$

定义 4[7] 设

$$\Phi(x,y)=(\phi^0(x,y),\phi^1(x,y),\phi^2(x,y),\phi^3(x,y))^{\mathrm T}$$

其中 $\phi^i(x,y)\in L^2(R^2)$为正交单尺度函数,如果它满足

$$\langle\Phi(x,y),\Phi(x-n,y-m)\rangle=(\langle\phi^i(x,y),\phi^j(x-n,y-m)\rangle)_{4\times4}=\delta_{0,n}\delta_{0,m}I_4$$

其中 $i,j=0,1,2,3,\ n,m\in Z$,则称 $\Phi(x,y)$为 4重正交多尺度函数.

定义 5 设

$$\Psi(x,y)=(\psi^0(x,y),\psi^1(x,y),\psi^2(x,y),\psi^3(x,y))^{\mathrm T}$$

其中 $\psi^i(x,y)\in L^2(R^2)$为正交单小波函数,如果它满足

$$\langle\Phi(x,y),\Psi(x-n,y-m)\rangle=\langle\Psi(x,y),\Phi(x-n,y-m)\rangle=O_{4\times4}$$

$$\langle\Psi(x,y),\Psi(x-n,y-m)\rangle=\delta_{0,n}\delta_{0,m}I_4,\ n,m\in Z$$

其中$\langle\Phi(x,y),\Psi(x-n,y-m)\rangle$, $\langle\Psi(x,y),\Phi(x-n,y-m)\rangle$和$\langle\Psi(x,y),\Psi(x-n,y-m)\rangle$的运算同定义 4中$\langle\Phi(x,y),\Phi(x-n,y-m)\rangle$的运算,则称 $\Psi(x,y)$为 4重正交多小波函数.

定义子空间序列 $W_j\subset L^2(R^2)$为

$$W_j=\overline{\mathrm{span}\{\psi^l_{j,n,m}: l=0,1,2,3,n,m\in Z\}},\quad j\in Z \tag{2}$$

其中:

$$\psi^l_{j,n,m}(x)=2^j\psi^l(2^jx-n,2^jy-m),\ l=0,1,2,3$$

2 二维正交多小波函数的构造

设

$$T_l(Z_1,Z_2)=\sum_{n,m\in Z}t_l(n,m)Z_1^{-n}Z_2^{-m},\quad l=0,1,2,3 \tag{3}$$

是 4个滤波器,由此构造

$$\psi^l(x,y)=2\sum_{n,m}t_l(n,m)\psi(2x-n,2y-m),\quad l=0,1,2,3 \tag{4}$$

下面研究滤波器 T_l满足什么条件时才使得 $\Psi(x,y)=(\psi^0(x,y),\psi^1(x,y),\psi^2(x,y),\psi^3(x,y))^{\mathrm T}$构成二维正交的多小波函数.

引入记号

$$A_{l,k_1,k_2}(Z_1,Z_2)=\sum_{n,m\in Z}t_l(2n+1-k_1,2m+1-k_2)\times Z_1^{-2n}Z_2^{-2m},\quad l=0,1,2,3,k_1,k_2=0,1 \tag{5}$$

定义矩阵

$$\mathrm A(Z_1,Z_2)=(A_{l,k_1,k_2}(Z_1,Z_2))_{4\times4},\quad l=0,1,2,3,\ k_1,k_2=0,1 \tag{6}$$

$$\mathrm T(Z_1,Z_2)=(T_l(\omega^nZ_1,\omega^mZ_2))_{4\times4},\quad n,m=0,1 \tag{7}$$

其中 $\omega=e^{-\pi},Z_1=e^{-\omega_1},Z_2=e^{-\omega_2},l=0,1,2,3.$

由式(3),(5)得

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm T_l(Z_1,Z_2)&=\sum_{a,b=0}^{1}Z_1^{a-1}Z_2^{b-1}A_{l,a,b}(Z_1,Z_2)\\
\mathrm T_l(\omega Z_1,Z_2)&=\sum_{a,b=0}^{1}(\omega Z_1)^{a-1}Z_2^{b-1}A_{l,a,b}(Z_1,Z_2)\\
\mathrm T_l(Z_1,\omega Z_2)&=\sum_{a,b=0}^{1}Z_1^{a-1}(\omega Z_2)^{b-1}A_{l,a,b}(Z_1,Z_2)\\
\mathrm T_l(\omega Z_1,\omega Z_2)&=\sum_{a,b=0}^{1}(\omega Z_1)^{a-1}(\omega Z_2)^{b-1}A_{l,a,b}(Z_1,Z_2)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

方程组(8)的系数矩阵为

$$\mathrm B=\begin{pmatrix}
Z_1^{-1}Z_2^{-1} & Z_2^{-1} & Z_1^{-1} & 1\\
\omega^{-1}Z_1^{-1}Z_2^{-1} & Z_2^{-1} & \omega^{-1}Z_1^{-1} & 1\\
Z_1^{-1}Z_2^{-1}\omega^{-1} & \omega^{-1}Z_2^{-1} & Z_1^{-1} & 1\\
\omega^{-2}Z_1^{-1}Z_2^{-1} & \omega^{-1}Z_2^{-1} & \omega^{-1}Z_1^{-1} & 1
\end{pmatrix} \tag{9}$$

引理 1 $\mathrm A(Z_1,Z_2)$, $\mathrm T(Z_1,Z_2)$和 B分别为式(6),(7)和式(9)定义的 3个矩阵,则有

(i) $\mathrm B\cdot\mathrm B^*=4I_4$ (*表示共轭转置);

(ii) $T(Z_1, Z_2) = BA(Z_1, Z_2)$.

定理 1 设 T_l, $l=0,1,2,3$是式(3)定义的 4个滤波器,$\psi(x,y)$是二维正交的单小波函数,$\psi^l(x,y)$, $l=0,1,2,3$是式(4)定义的 4个函数,则下列条件是等价的:

1) $\{\psi^0(x-n,y-m),\psi^1(x-n,y-m),\psi^2(x-n,y-m),\psi^3(x-n,y-m): n,m\in Z\}$构成 U_1 的规范正交基.

2) $\sum_{n,m\in Z} t_l(n-2j,m-2k)t_\lambda(n-2j_1,m-2k_1) = \delta_{l,\lambda}\delta_{j,j_1}\delta_{k,k_1}$, 其中 $j,k,j_1,k_1\in Z$, $l,\lambda=0,1,2,3$.

3) $T^*(Z_1,Z_2)T(Z_1,Z_2)=4I_4$.

4) $A^*(Z_1,Z_2)A(Z_1,Z_2)=I_4$.

证明 由于$\{\psi^0(x-n,y-m),\psi^1(x-n,y-m),\psi^2(x-n,y-m),\psi^3(x-n,y-m): n,m\in Z\}$是 U_1 的规范正交基,由定义 3知,$\{\psi(2x-n,2y-m): n,m\in Z\}$也是 U_1 的规范正交基,所以

$$\begin{aligned}\delta_{l,\lambda}\delta_{j,j_1}\delta_{k,k_1} &= \langle\psi^l(x-j,y-k),\psi^\lambda(x-j_1,y-k_1)\rangle = \\ &4\Big\langle\sum_{n,m\in Z} t_l(n,m)\psi(2x-2j-n,2y-2k-m), \\ &\sum_{n_1,m_1\in Z} t_\lambda(n_1,m_1)\psi(2x-2j_1-n_1,2y-2k_1-m_1)\Big\rangle = \\ &\sum_{n,m\in Z} t_l(n-2j,m-2k)t_\lambda(n-2j_1,m-2k_1)\end{aligned} \tag{10}$$

由式(10)知 1) ⇒2)成立

由式(5)和式(6)知

$$A^*(Z_1,Z_2)A(Z_1,Z_2) = (h_{ab})_{4\times4} \tag{11}$$

其中 a为行指标,b为列指标,且

$$h_{ab} = \sum_{i,j=0}^{1}\sum_{n,m}\sum_{n_1,m_1} t_{a-1}(2n+i,2m+j)\times t_{b-1}(2n_1+i,2m_1+j)Z_1^{2(n-n_1)}Z_2^{2(m-m_1)}$$

由式(11)知 2) ⇔4), 3) ⇔4)由引理可证.

下面证明 2) ⇒1)

由式(4)知,$\psi^l(x,y)\in U_1$,又

$$\begin{aligned}&\langle\psi^l(x-j,y-k),\psi^\lambda(x-j_1,y-k_1)\rangle = \\ &4\Big\langle\sum_{n,m\in Z} t_l(n,m)\psi(2x-2j-n,2y-2k-m), \\ &\sum_{n_1,m_1\in Z} t_\lambda(n_1,m_1)\psi(2x-2j_1-n_1,2y-2k_1-m_1)\Big\rangle = \\ &\sum_{n,m\in Z} t_l(n-2j,m-2j_1)t_\lambda(n-2k,m-2k_1) = \\ &\delta_{l,\lambda}\delta_{j,k}\delta_{j_1,k_1}\end{aligned}$$

所以由式(2)知$\{\psi^0(x-n,y-m),\psi^1(x-n,y-m),\psi^2(x-n,y-m),\psi^3(x-n,y-m): n,m\in Z\}$是 $L^2(R^2)$的规范正交系,因此它也是 U_1 的规范正交系.

下面只需证$\{\psi^0(x-n,y-m),\psi^1(x-n,y-m),\psi^2(x-n,y-m),\psi^3(x-n,y-m): n,m\in Z\}$在 U_1 中是完备的.

$\forall g(x,y)\in U_1$,有 $g(x,y) = 2\sum_{n,m\in Z} c_{n,m}\psi(2x-n,2y-m)$

要求对所有 $l=0,1,2,3$都有

$$\langle\psi^l(x-n,y-m),g(x,y)\rangle=0$$

即

$$\langle\psi^l(x-n,y-m),g(x,y)\rangle = 4\sum_{n_1,m_1} t_l(n_1-2n,m_1-2m)c_{n_1,m_1} = 0$$

所以由式(10)知,c_{n_1,m_1}的系数阵构成一可逆算子,所以对所有的 $l=0,1,2,3$,都有 $g(x,y)=0$

又由 $g(x,y)$的任意性,知$\{\psi^0(x-n,y-m),\psi^1(x-n,y-m),\psi^2(x-n,y-m),\psi^3(x-n,y-m): n,m\in Z\}$在子空间 U_1 内是完备的,所以$\{\psi^0(x-n,y-m),\psi^1(x-n,y-m),\psi^2(x-n,y-m),\psi^3(x-n,y-m): n,m\in Z\}$不仅是正交的且是 U_1 的规范正交基.

定理 2 设 $\phi^l(x,y)$ ($l=0,1,2,3$)是 $\psi^l(x,y)$对应的尺度函数,$\Psi(x,y)$是式(4)所构造的多小波函数,令

$$\Phi(x,y) = (\phi^0(x,y),\phi^1(x,y),\phi^2(x,y),\phi^3(x,y))^T$$

则 I) $\langle\Phi(x,y),\Psi(x-n,y-m)\rangle = O_{4\times4}$,

II) $\langle\Psi(x,y),\Psi(x-n,y-m)\rangle = \delta_{0,n}\delta_{0,m}I_4$

其中 $n,m\in Z$.

证明 I)由定义 4知

$$\langle\Phi(x,y),\Psi(x-n,y-m)\rangle = (c_{ab})_{4\times4} = O_{4\times4}$$

其中 a为行指标,b为列指标,且

$$c_{ab} = \langle\phi^{a-1}(x,y),\psi^{b-1}(x-n,y-m)\rangle = 0$$

II)利用定理 1中的条件 3),与 I)同理可证.

由定理 2和定义 5知,由此构造的二维多小波 $\Psi(x,y)$为二维正交多小波.

定理 3 设式(3)定义的滤波器 T_l, $l=0,1,2,3$为特殊的有限脉冲滤波器,即它具有

$$T_l(Z_1,Z_2) = \sum_{n,m=0}^{1} t_l(n,m)Z_1^{-n}Z_2^{-m} \tag{12}$$

构造矩阵

$$u = \begin{pmatrix} t_0(0,0) & t_1(0,0) & t_2(0,0) & t_3(0,0) \\ t_0(1,0) & t_1(1,0) & t_2(1,0) & t_3(1,0) \\ t_0(0,1) & t_1(0,1) & t_2(0,1) & t_3(0,1) \\ t_0(1,1) & t_1(1,1) & t_2(1,1) & t_3(1,1) \end{pmatrix}$$

(下转第 113页)

图 4　文中算法得到的边缘图像

实验结果表明:算法保留了区分阶梯型边界和跳跃型边界的能力,又能很好的去除各种噪声得到的边缘像素抗噪性好、边缘连续的同时又保证了边缘定位的准确性. 对文字图像轮廓提取得到理想的效果,本文方法简单,有一定实用价值. 当然本文算法对其他梯型边界图像的检测也是有效的.

参 考 文 献:

[1] HOU Jie, DENG Caixia, YE Jinhua. Application of Canny Algorithm and Wavelet Transform in The Bound of Step-Structure Edge Detection [J]. Journal of Information and Computation Science, 2008, 5(4): 1759 - 1764.

[2] WANG Jingdong, XU Yibin, LI Peng. Study of Border Processing in Image Wavelet Edge Detection [J]. Computer Engineering, 2007, 33(5): 161 - 163.

[3] GONZALO Pajares. A Wavelet - based Image Fusion Tutorial [J]. Pattern Recognition, 2004, 37: 1855 - 1872.

[4] ELLINAS J N, SANGRIOTIS M S. Stereo Image Compression Using Wavelet Coefficients Morphology [J]. Image and Vision Computing, 2004, 22: 281 - 290.

[5] MALLAT S, ZHANG S. Characterization of signals from multiscale edges[J]. IEEE Trans PAMI, 1992, 14(7): 710 - 732.

[6] DAUBECHIES I. Ten lectures on Wavelets. CBMS-NSF Ser. Appl Math[M]. SIAM. Philadelphia, 1992.

[7] 孙延奎. 小波分析及其应用 [M]. 北京:机械工业出版社, 2005.

[8] 邓彩霞,曲玉玲,侯　杰. Gauss小波像空间的描述 [J]. 数学学报, 2008, 51(2): 225 - 234.

[9] 唐远炎,王　铃. 小波分析与文本文字识别 [M]. 北京:科学出版社, 2002.

(编辑:王　萍)

(上接第 109页)

则定理 1中条件 2)成立的充分必要条件为矩阵 u 是酉矩阵.

定理 3说明当滤波器 T_l, $l = 0, 1, 2, 3$为式 (12)定义且由它的系数 $t_l(i, j)$, $i, j = 0, 1$构造的矩阵 u 是一个酉矩阵时,对任意一个正交的单小波函数 $\psi(x, y)$,就可以构造出一个多小波函数

$$\Psi(x, y) = (\psi^0(x, y), \psi^1(x, y), \psi^2(x, y), \psi^3(x, y))^T$$

其中

$$\psi^l(x, y) = 2\sum_{n,m=0}^{1} t_l(n, m)\psi(2x - n, 2y - m) \quad l = 0, 1, 2, 3 \tag{13}$$

由式 (13)知, $\psi^l(x, y)$ $(l = 0, 1, 2, 3)$的伸缩平移生成的空间与正交单小波函数的伸缩平移生成的空间是完全一样的,由此构造的二维正交多小波具备正交性,保持了能量,而且与原来的正交单小波相比,获得了更大的自由度和灵活性.

3　结　语

本文利用二维正交单小波函数构造了二维正交多小波函数,并给出了表达式,在其构造过程中需要找一个酉矩阵,然后和二维正交单小波函数做组合就可以构造出一种二维正交多小波.

参 考 文 献:

[1] GOODMAN T, LEE S. Wavelets of Multiplicity[J]. Tran on Amer Math Soc, 1994, 342: 307 - 324.

[2] GERONIMO J S, HARDIN D P, MASSOPUST P R. Fractal Function and Wavelet Expansions Based on Several Functions [J]. J of Approx Theory, 1994, 78: 373 - 401.

[3] DAUBECHIES I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets[J]. Pure Appl Math, 1988, 41: 909 - 996.

[4] 崔丽鸿,程正兴. 由给定尺度函数构造短支撑正交多小波的一种算法 [J]. 西安交通大学学报, 2003, 37(2): 211 - 214.

[5] DAUBECHIES I. Ten Lectures on Wavelets[M]. Society for Industrial and Applied Math, 1992.

[6] 程正兴. 小波分析算法与应用 [M]. 西安:西安交通大学出版社, 2002.

[7] 程正兴. 多小波理论的发展与研究 [J]. 工程数学学报, 2001, 18(5): 2 - 3.

(编辑:王　萍)